

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, ассистент., НТУ «ХПИ»

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

За допомогою функцій Кельвіна виражено амплітуди коливань швидкості руху вібророзрідженої зернової суміші на плоскому нахиленому решеті в установленому режимі роботи. Вивчено вплив параметрів повздовжніх коливань решета і механіко-технологічних характеристик суміші на нерівномірність її потоку, коли зміна вібров'язкості суміші по товщині шару зерна описується степеневою функцією з від'ємним показником степені.

С помощью функций Кельвина выражены амплитуды колебаний скорости движения виброожиженной зерновой смеси на плоском наклонном решете в установившемся режиме работы. Изучено влияние параметров продольных колебаний решета и механико-технологических характеристик смеси на неравномерность её потока, когда изменение вибровязкости смеси по толщине слоя описывается степенной функцией с отрицательным показателем степени.

With the aid of the Kelvin pronounced amplitude of the velocity vibroliquefaction grain mixture on a flat inclined sieve in the steady state of his work. The influence of parameters of longitudinal vibration of the sieve and mechanical-technological characteristics of the mixture on the unevenness of its flow when a change of the vibroviscosity mixture of the layer of grain is described by a power function with a negative exponent.

Постановка проблемы. Вибрации решета интенсифицируют процесс разделения на нём зерновой смеси на две фракции. Движение виброожиженной смеси по наклонному решету имеет сходство с течением вязкой жидкости по наклонному лотку. Поэтому для описания потока зерна по вибрирующей поверхности в математических моделях стали использовать уравнения динамики однородной вязкой жидкости. Но специфика виброожиженной смеси проявляется в том, что её эффективная вязкость зависит от внутреннего трения и давления, которые возрастают с удалением от свободной поверхности вглубь слоя. При учёте этой особенности, движение смеси приходится описывать уравнениями течения неоднородной жидкости, у которой вязкость зависит от одной из пространственных координат. Разрабатывая уточнённые модели зернового потока по направляющей перфорированной поверхности желательно учитывать эту зависимость.

Обзор последних исследований и публикаций. Из работ, в которых математически моделировалось движение неоднородного зернового слоя, отметим [1-4,9]. В [1] определялась усреднённая за период колебаний скорость потока. Поэтому в уравнениях течения не учитывались (отбрасывались) инерционные члены. Колебания скорости движения неоднородного слоя,

вызванные продольными вибрациями решета, рассматривали в [2,3], где изменение вибровязкости по толщине слоя подчиняли линейной зависимости. Отличие работы [3] от [2] заключается в том, что в ней дополнительно учтено разделение потока зерна на перфорированной поверхности на потоки проходовой и сходовой фракций. В [4] рассмотрены установившиеся колебания скорости потока в линейно-неоднородном слое, вызванные поперечными вибрациями решета. Для безотрывного движения, *методом Бубнова-Галёркина* построены приближённые решения динамической краевой задачи. Колебания в слое движущейся зерновой смеси с нелинейным изменением вибровязкости по толщине слоя относятся к малоизученным вопросам, что стало мотивом к этой работе.

Целью работы является вывод формул для расчёта колебаний скорости потока зерновой смеси на плоском решете, совершающем продольные гармонические колебания, когда изменение эффективной вязкости смеси по толщине слоя нелинейное и аппроксимируется степенной функцией с отрицательным показателем степени.

Частным случаем этой аппроксимации является гиперболический закон увеличения вибровязкости с удалением от свободной поверхности слоя зерна.

Постановка и аналитическое решение краевой задачи. Рассматривая установившийся режим колебаний, полагаем проекцию абсолютной скорости u на координатную ось oy (см. рис. 1) равной нулю.

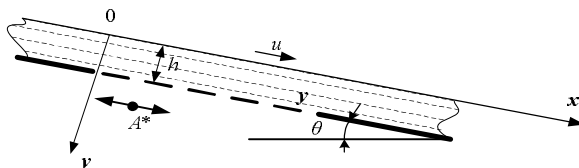


Рисунок 1 – Расчётная схема.

Проекцию абсолютной скорости потока u на ось ox считаем независимой от координаты x и определяем из решения краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta; \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2) $v(y)$ – эффективная кинематическая вязкость виброоживленной зерновой смеси; g – ускорение свободного падения; θ – угол наклона решета к горизонту; h – толщина движущегося слоя зерна; A^*, ω – амплитуда и частота продольных колебаний решета; t – время.

Далее предполагаем, что изменение $v(y)$ с достаточной для практики точностью аппроксимируется выражением

$$v(y) = v_0(1 - \beta y)^{-\alpha}, \quad (3)$$

где $v_0 = v(0)$ – вибровязкость на поверхности слоя; α, β – неотрицательные постоянные, причём $\beta h < 1$.

При $\alpha = 1$ зависимость (3) представляет гиперболический закон возрастания $v(y)$ с увеличением y , который рассмотрен в [5] и [6].

Введём вспомогательную переменную

$$\xi = 1 - \beta y$$

и подстановкой (3) в (1) уравнение (1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha. \quad (4)$$

Учитывая линейность (4), его решение ищем в виде суммы

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (5)$$

в которой первое слагаемое не зависит от t .

Выражение (5) будет решением (4), когда

$$\frac{d^2 u_1}{d \xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{d u_1}{d \xi} = - \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{1}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

При этом, в силу (2), должны выполняться граничные условия:

$$\left. \frac{d u_1}{d y} \right|_{y=0} = u_1(h, t) = 0; \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; u_2(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (9)$$

Краевая задача, представленная выражениями (6) и (8), имеет решение

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \left(\frac{\xi^{\alpha+1} - \xi_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\xi^{\alpha+2} - \xi_1^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right), \quad (10)$$

где $\xi_1 = 1 - \beta h > 0$. Решение (10) находили, понижая (6) до уравнения первого порядка.

Формула (10) имеет неопределённость вида $\|0/0\|$ при $\beta \rightarrow 0$. Раскрывая её, для указанного частного случая, получаем

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{2v_0} (h^2 - y^2), \quad (11)$$

что соответствует движению однородного слоя [2].

Формула (10) переходит в (11) также при $\alpha \rightarrow 0$.

Решение краевой задачи, представленной выражениями (7) и (9), ищем в виде

$$u_2(y, t) = \operatorname{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t) + \operatorname{Im} w(y) \cdot \cos(\omega t), \quad (12)$$

где комплексная функция вещественного аргумента $w(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{dw}{d\xi} - \frac{i\omega}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (13)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} w(h) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(h) = 0; \quad \operatorname{Re} w'_y(0) = \operatorname{Im} w'_y(0) = 0. \quad (14)$$

Общее решение уравнения (13) выражается через цилиндрические функции:

$$w(y) = (c_1 + ic_2) \eta^s e^{i \frac{s\pi}{2}} I_s \left(\eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right) + (c_3 + ic_4) \eta^s e^{-i \frac{s\pi}{2}} K_s \left(\eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right). \quad (15)$$

Здесь $s = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$; $\eta = \lambda \xi^q$; $\lambda = \frac{1}{\beta q} \sqrt{\frac{\omega}{v_0}}$; $q = 1 + \frac{\alpha}{2}$; $I_s(z)$, $K_s(z)$ - модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индексов s ; c_1, c_2, c_3, c_4 - вещественные произвольные постоянные.

Учитывая, что [7]

$$e^{i \frac{s\pi}{2}} I_s \left(\eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right) = \operatorname{ber}_s(\eta) + i \operatorname{bei}_s(\eta); \quad (16)$$

$$e^{-i \frac{s\pi}{2}} K_s \left(\eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right) = \operatorname{ker}_s(\eta) + i \operatorname{kei}_s(\eta),$$

вещественную и мнимую части решения (15) выражаем с помощью функций

Кельвина: $ber_s(\eta), bei_s(\eta), ker_s(\eta), kei_s(\eta)$:

$$\operatorname{Re} w = \eta^s [c_1 ber_s(\eta) - c_2 bei_s(\eta) + c_3 ker_s(\eta) - c_4 kei_s(\eta)], \quad (17)$$

$$\operatorname{Im} w = \eta^s [c_1 bei_s(\eta) + c_2 ber_s(\eta) + c_3 kei_s(\eta) + c_4 ker_s(\eta)]$$

Продифференцируем выражения (17) по η . Используя (16) и формулы [7]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[\eta^s I_s \left(\eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right] &= e^{i\frac{\pi}{4}} \eta^s I_{s-1} \left(\eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right); \\ \frac{d}{d\eta} \left[\eta^s K_s \left(\eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right] &= -e^{i\frac{\pi}{4}} \eta^s K_{s-1} \left(\eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} (\operatorname{Re} w) &= -\frac{\eta^s}{\sqrt{2}} \{c_1 [ber_{s-1}(\eta) + bei_{s-1}(\eta)] + c_2 [ber_{s-1}(\eta) - bei_{s-1}(\eta)] + \\ &+ c_3 [ker_{s-1}(\eta) + kei_{s-1}(\eta)] + c_4 [ker_{s-1}(\eta) - kei_{s-1}(\eta)]\}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} (\operatorname{Im} w) &= \frac{\eta^s}{\sqrt{2}} \{c_1 [ber_{s-1}(\eta) - bei_{s-1}(\eta)] - c_2 [ber_{s-1}(\eta) + bei_{s-1}(\eta)] + \\ &+ c_3 [ker_{s-1}(\eta) - kei_{s-1}(\eta)] - c_4 [ker_{s-1}(\eta) + kei_{s-1}(\eta)]\}. \end{aligned}$$

Учитывая (14), (17) и (18), составляем систему алгебраических уравнений для определения постоянных $c_j, j = \overline{1;4}$:

$$\begin{aligned} c_1 ber_s(\zeta) - c_2 bei_s(\zeta) + c_3 ker_s(\zeta) - c_4 kei_s(\zeta) &= A^* \omega \zeta^{-s}; \\ c_1 bei_s(\zeta) + c_2 ber_s(\zeta) + c_3 kei_s(\zeta) + c_4 ker_s(\zeta) &= 0; \\ c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 &= 0; \\ c_1 f_2 - c_2 f_1 + c_3 f_4 - c_4 f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$f_{1,2} = ber_{s-1}(\lambda) \pm bei_{s-1}(\lambda), \quad f_{3,4} = ker_{s-1}(\lambda) \pm kei_{s-1}(\lambda), \quad \zeta = \lambda(1 - \beta h)^q.$$

Решив (19), находим константы:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad c_3 = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2; \quad c_4 = -\delta_2 c_1 + \delta_1 c_2; \quad (20)$$

$$\Delta = (ber_s(\zeta) + \delta_1 ker_s(\zeta) + \delta_2 kei_s(\zeta))^2 + (bei_s(\zeta) + \delta_1 kei_s(\zeta) - \delta_2 ker_s(\zeta))^2;$$

$$\Delta_1 = A^* \omega \zeta^{-s} (ber_s(\zeta) + \delta_1 ker_s(\zeta) + \delta_2 kei_s(\zeta));$$

$$\Delta_2 = -A * \omega \zeta^{-s} (bei_s(\zeta) + \delta_1 kei_s(\zeta) - \delta_2 \ker_s(\zeta));$$

$$\delta_1 = -\frac{f_1 f_3 + f_2 f_4}{f_3^2 + f_4^2}; \quad \delta_2 = \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3}{f_3^2 + f_4^2}.$$

Таким образом, согласно (5), (10), (12), (17), колебания скорости потока виброожиженной смеси описываются выражением

$$\begin{aligned} u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} & \left(\frac{\xi^{\alpha+1} - \xi_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\xi^{\alpha+2} - \xi_1^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right) + \eta^s [c_1 ber_s(\eta) - c_2 bei_s(\eta) + \\ & + c_3 \ker_s(\eta) - c_4 kei_s(\eta)] \sin(\omega t) + \eta^s [c_1 bei_s(\eta) + c_2 ber_s(\eta) + \\ & + c_3 kei_s(\eta) + c_4 \ker_s(\eta)] \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (21)$$

в котором постоянные c_j следует вычислять по формулам (20).

Решение (21) существенно упрощается когда $\alpha = 0$. При этом значении показателя степени движущийся слой смеси однороден. Индекс у функций Кельвина $s = 1/2$ и они сводятся к элементарным функциям:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ber_{1/2}(\eta) \\ bei_{1/2}(\eta) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \left\{ e^{\eta_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\eta_1 + \frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\eta_1 + \frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} - e^{-\eta_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\eta_1 - \frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\eta_1 - \frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \right\}; \\ \begin{bmatrix} \ker_{1/2}(\eta) \\ kei_{1/2}(\eta) \end{bmatrix} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\eta}} e^{-\eta_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\eta_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\eta_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}, \quad \eta_1 = \frac{\eta}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Поэтому колебания скорости потока однородного слоя в работе [8] описаны с помощью гиперболических и тригонометрических функций.

Интегрируя (21), по формуле

$$\bar{Q}(t) = \int_0^h u(y, t) dy = \frac{1}{\beta q \lambda^{1/q}} \int_{\zeta}^{\lambda} \eta^{1-2s} u(\eta, t) d\eta \quad (22)$$

определяем удельную производительность решета.

Поскольку [7]

$$\begin{aligned} \int \eta^{1-s} \begin{bmatrix} ber_s(\eta) \\ bei_s(\eta) \end{bmatrix} d\eta &= \frac{\eta^{1-s}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} ber_{s-1}(\eta) - bei_{s-1}(\eta) \\ ber_{s-1}(\eta) + bei_{s-1}(\eta) \end{bmatrix}; \\ \int \eta^{1-s} \begin{bmatrix} \ker_s(\eta) \\ kei_s(\eta) \end{bmatrix} d\eta &= \frac{\eta^{1-s}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \ker_{s-1}(\eta) - kei_{s-1}(\eta) \\ \ker_{s-1}(\eta) + kei_{s-1}(\eta) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

то подстановка (21) в (22) позволяет описать колебания удельной производительности решета выражением

$$\bar{Q}(t) = \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \left[\frac{1 - \xi_1^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\beta} - \frac{1 - \xi_1^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\beta} + \frac{h \xi_1^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{h \xi_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2} \beta q \lambda^{1/q}} \left[(c_1 s_1 - c_2 s_2 + c_3 s_3 - c_4 s_4) \sin(\omega t) + (c_1 s_2 + c_2 s_1 + c_3 s_4 + c_4 s_3) \cos(\omega t) \right]$$

В нём

$$s_{1,2} = \lambda^{1-s} [ber_{s-1}(\lambda) \mp bei_{s-1}(\lambda)] - \zeta^{1-s} [ber_{s-1}(\zeta) \mp bei_{s-1}(\zeta)];$$

$$s_{3,4} = \lambda^{1-s} [ker_{s-1}(\lambda) \mp kei_{s-1}(\lambda)] - \zeta^{1-s} [ker_{s-1}(\zeta) \mp kei_{s-1}(\zeta)]$$

С целью апробации полученных решений краевой задачи проведены вычисления изменений скорости потока смеси при следующих исходных данных: $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $h = 0,006 \text{ м}$, $v_0 = 0,00005 \text{ м}^2/\text{с}^{-1}$; $\alpha = 1$; $\beta = 0,1 \text{ м}^{-1}$ которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [2]. Колебания решета характеризовали параметрами: $\theta = 5^\circ$; $A^* = 0,0075 \text{ м}$; $\omega = 52,33 \text{ с}^{-1}$.

Вычисленные по формуле (21) изменения скорости по толщине слоя и по времени показаны графически на рис. 2-5.

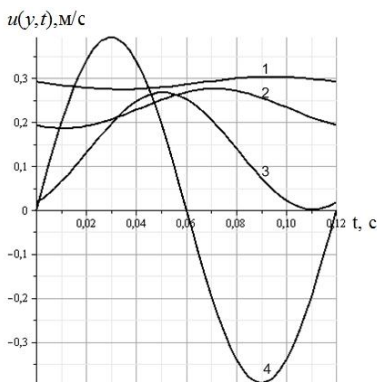


Рисунок 2 – Колебания скорости при разных y : 1, 2, 3, 4 - $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

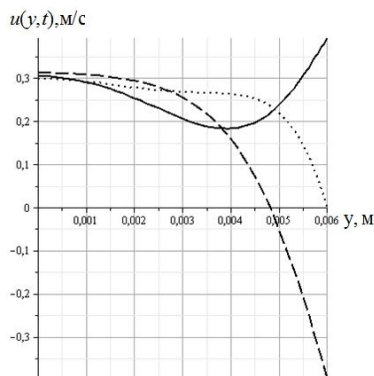


Рисунок 3 – Профили скорости в различные моменты времени: — $t = \frac{\pi}{2\omega}$; $t = \frac{3\pi}{2\omega}$

$$t = \frac{\pi}{\omega}; \quad --- t = \frac{3\pi}{2\omega}$$

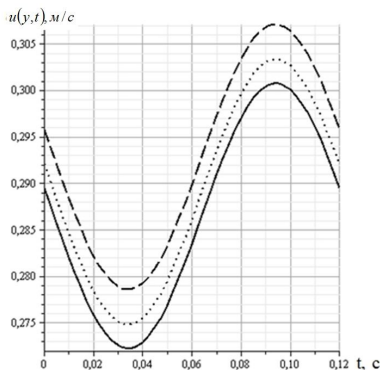


Рисунок 4 – Колибання швидкості при різних значеннях α : — $\alpha = 0,1$; $\alpha = 0,4$; --- $\alpha = 0,7$ и $\beta = 0,01 \text{ м}^{-1}$; $y h^{-1} = 0,25$

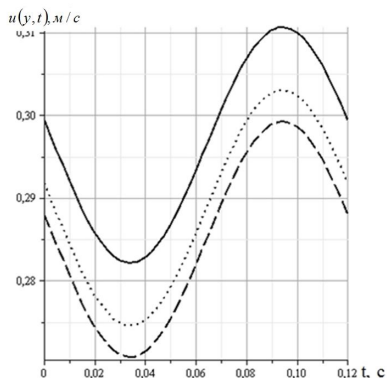


Рисунок 5 – Колибання швидкості при різних значеннях β : — $\beta = 0,005 \text{ м}^{-1}$; $\beta = 0,075 \text{ м}^{-1}$; --- $\beta = 0,01 \text{ м}^{-1}$ и $\alpha = 1$; $y h^{-1} = 0,25$

Выводы. Расчёты подтверждают быстрое затухание вибрационного поля с удалением от поверхности виброрешета в сторону свободной поверхности слоя. Это затухание усиливается неоднородностью вибровязкости зернового слоя по его толщине, поскольку у свободной поверхности она меньше, чем у поверхности решета.

Список литературы: 1. Ольшанский В.П., Кучеренко С.И., Бурлака В.В. К расчёту движения зерновой смеси по плоскому вибрирующему решету // Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 77. – С. 238-244. 2. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: “Міськдрук”, 2010. – 174 с. 3. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О колебаниях скорости неоднородного слоя зерновой смеси на плоском виброрешете // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вип. 10. Т.7. – С. 32-42. 4. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Дидур В.А. Колебания скорости неоднородного слоя зерновой смеси, вызванные поперечными вибрациями решета // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вип. 10. Т.7. – С. 173-180. 5. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчёту колебаний неоднородного слоя зерновой смеси на виброрешете // Вібрації в техніці та технологіях. 2011. – №1 (61) – С.182-185. 6. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Виброрешётная сепарация зерновых смесей. – Харьков: “Міськдрук”, 2011. – 280с. 7. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) – М.: Наука, 1979. – 832 с. 8. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчёту движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вібрації в техніці та технологіях. 2009. – № 1(53). – С. 109-113. 9. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Колебания скорости потока сепарируемой зерновой смеси на цилиндрическом виброрешете // Динамика и прочность машин. Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ, 2010. – Вип. 69. – С. 100-108.

Поступила в редколлегию 01.09.2011